

Aufgabe 7-1

Beweisen Sie die Korrektheit des folgenden Programmstücks mit der Schleife bzgl. Vor- und Nachbedingungen:

```
{n ∈ N}
f := 1;
k := 0;
while (k < n) do
  begin
    k := k + 1;
    f := k * f
  end
{P}
```

Hinweise:

Benutzen Sie das in der Vorlesung vorgestellte Verfahren mit einer Invariantenbedingung und einer Variantenzahl.

Seien B die Schleifenbedingung, S der Schleifenrumpf, I die Invariante, z die Variante und z_0 eine Konstante.

1. Finden Sie die geeignete Invariante I und Variante z .
2. Was berechnet das Programm? Bestimmen Sie die Nachbedingung P .
3. Zeigen Sie, dass $\{I \wedge B\} S \{I\}$ gilt (die Invariantenbedingung I gilt in der Schleife).
4. Zeigen Sie, dass $\{I \wedge \neg B\} \Rightarrow P$ gilt (in der Nachbedingung gilt immer die Invariante und niemals die Schleifenbedingung).
5. Zeigen Sie, dass $\{I \wedge B \wedge z = z_0\} S \{z < z_0\}$ gilt (Fortschrittsbedingung).
6. Zeigen Sie, dass $(I \wedge z \leq 0) \Rightarrow \neg B$ gilt (Terminierungsbedingung).

Aufgabe 7-2

Beweisen Sie die Korrektheit des folgenden Programmstücks mit der Schleife bzgl. Vor- und Nachbedingungen:

```
{n > 0}
f := 1;
k := 0;
while (k < n) do
  begin
    k := k + 1;
    f := k * f
  end
{P}
```

Beachten Sie Hinweise zu der Aufgabe 7-1.

Als Invariante können Sie $I = \{f = k! \wedge k < n + 1\}$ verwenden.

Beweisen Sie die Korrektheit des folgenden Programmstücks mit der Schleife bzgl. Vor- und Nachbedingungen:

```
{T}
f := 1;
k := 0;
while (k<n) do
  begin
    k := k + 1;
    f := k * f
  end
{P}
```

Beachten Sie Hinweise zu der Aufgabe 7-1.

Aufgabe 7-4

Gegeben sei das folgende (unvollständige) Programmstück zur Division von ganzen Zahlen mit Rest mit Vor- und Nachbedingungen. Vervollständigen Sie das Programm und zeigen Sie mittels des Verfahrens zur Konstruktion von Schleifen, dass das Programm korrekt ist und terminiert.

```
V: {(x≥0) ∧ (y>0)}
  S0
  {I}
  while B do
    begin
      {I ∧ B ∧ z=z0}
      S
      {I ∧ z<z0}
    end
  {I ∧ ¬B}
```

P: {x=q*y+r ∧ (0≤r<y)}

Sei I die Invariante: { x=q*y+r ∧ r≥0 }

S0: q := 0; r := x

S: r := r-y; q := q+1

Für die Variante z sei r gewählt.

z₀ sei eine Konstante.

1. Finden Sie die Schleifenbedingung B, so dass gilt: (I ∧ ¬B) ⇒ P
2. Zeigen Sie, dass {V} S0 {I} gilt (Invariantenbedingung I gilt vor der Schleife)
3. Zeigen Sie, dass {I ∧ B} S {I} gilt (Invariantenbedingung I gilt in der Schleife)
4. Zeigen Sie, dass {I ∧ B ∧ z=z₀} S {z<z₀} gilt (Fortschrittsbedingung)
5. Zeigen Sie, dass (I ∧ z≤0) ⇒ ¬B gilt (Terminierungsbedingung)
6. Wann würde diese Schleife nie terminieren?